



TITLE:

# Two-bridge knots with unknotting number one

AUTHOR(S):

村上, 斉; 金信, 泰造

---

CITATION:

村上, 斉 ...[et al]. Two-bridge knots with unknotting number one. 数理解析研究所講究録 1985, 575: 126-134

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99235>

RIGHT:

## Two-bridge knots with unknotting number one

大阪市大 理 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

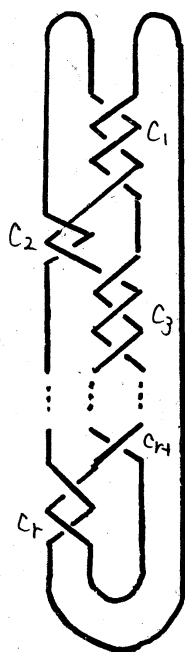
九州大 理 金信泰造 (Taizo Kanenobu)

3次元球面の中の, 向きを考えない knot  $K$  を考える。その射影図の交差の上下を入れ換える操作を unknotting operation と呼ぶ。



$K$  のどのような射影図も, 有限回の unknotting operation を施すことによ, て, 自明な knot の射影図になることもわかる。そこで,  $K$  のすべての射影図の中で, 自明な knot を得るために必要な unknotting operation の最小数を, unknotting number と呼ぶ,  $u(K)$  と書く [13]。

two-bridge knot とは, knot を  $\mathbb{R}^3$  の中で考えたとき, その  $\mathbb{R}^3$  への射影で極大点が2個しかないようなものをとれるものを言う。



$C_1, C_3, \dots$  は右みねりの回数

$C_2, C_4, \dots$  は左みねりの回数

このとき、その  $(\mathbb{R}^2 \setminus \text{point})$  の射影図は上のようになり、この knot を  $C(C_1, C_2, \dots, C_r)$  と表す。(Conway's notation, [4, 2]) また、3次元球面の two-bridge knot の double branched cover は lens space になり、 $C(C_1, C_2, \dots, C_r)$  の double branched cover は lens space  $L(p, q)$  となる。ただし、 $p, q$  は

$$\frac{p}{q} = C_1 + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{C_3 + \dots + \frac{1}{C_r}}}$$

で与えられる。[4, 2, 12] ここで、この two-bridge knot を  $S(p, q)$  と表すことにする。(Schubert's notation, [11, 2]) 今は、knot を考えているので、 $p$  は正の奇数となる。また、 $S(p, q)$  と  $S(p, -q)$  は同じ knot になる。

ここでは, two-bridge knot のうち, unknotting number が 1 であるものをすべて決定する。すなわち,

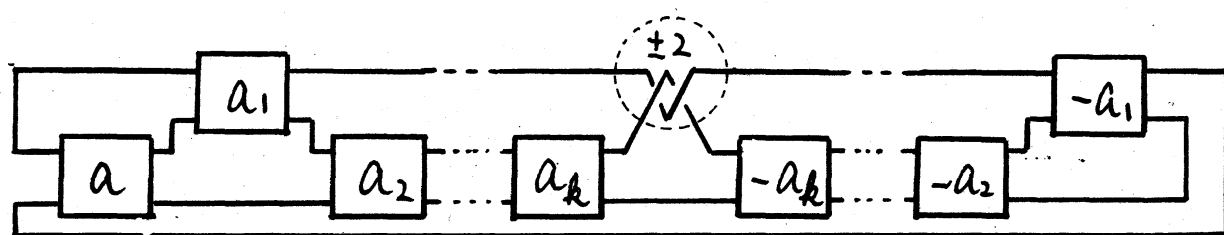
定理 [6]  $K$  を (自明でない) two-bridge knot とする。そのとき, 次の 3 つは同値である。

(1)  $u(K) = 1$

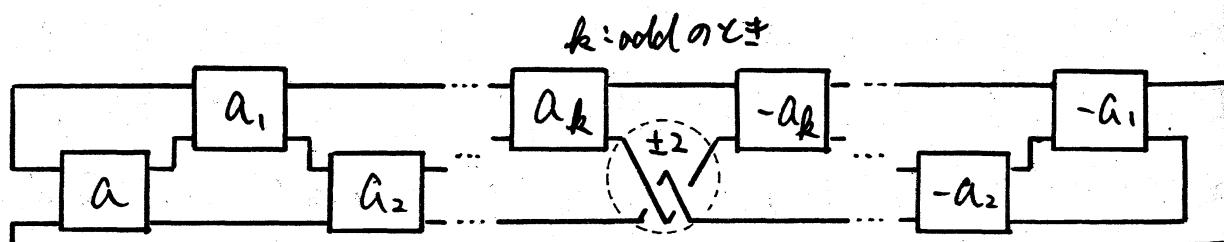
(2)  $K$  は,  $S(p, 2n^2)$  と表される。ただし,  $n$  は次の条件を満たす整数。

「 $n$  と互いに素な整数  $m$  が存在して  $2mn = p \pm 1$  となる。」

(3)  $K$  は,  $C(a, a_1, a_2, \dots, a_k, \pm 2, -a_k, \dots, -a_2, -a_1)$  と表される。



$k$ : even のとき



3

証明 まず, 前ページの図の破線の所で unknotting operation を行なえば, 自明な knot になることがわかるので,  
 (3)  $\Rightarrow$  (1) は示された。

(1)  $\Rightarrow$  (2) の証明  $K$  を  $S(p, q)$  とする。Lickorish [7] により, 次のことが示されている。

「 $u(K) = 1$  となる knot  $K$  の double branched cover は, ある strongly invertible knot  $k$  の  $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery によ, て得られる。(ただし,  $p$  は正の奇数)」 ([8] も参照)

two-bridge knot  $S(p, q)$  の double branched cover は,  $L(p, q)$  であるから,  $u(S(p, q)) = 1$  なら  $L(p, q)$  が, ある knot  $k$  の  $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery で得られるはずである。

そこで, 次の Cyclic surgery theorem [5] の特別な場合を使う。

「torus knot 以外の knot  $k$  を Dehn surgery して得られた 3-manifold の基本群が cyclic であるば, その surgery 係数は整数である。」

$\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  で cyclic だから, 上の事実により surgery された knot  $k$  は torus knot でなければならぬ。

Moser [9] により,  $(m, n)$ -torus knot ( $m, n$  は互いに素) の  $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery が lens space であるば,  $|\pm 2mn + p| = 1$  であり, そのとき得られる lens space は  $L(p, \pm 2n^2)$

であることがわかってゐる。よつて、 $K = S(p, p)$  は、このとき  
 $n$ を保ち  
 $S(p, \pm 2n^2) = S(p, 2n^2)$  と表すことができる。

(2)  $\Rightarrow$  (3) の証明 まず、 $n=1$  のときを考えよう。 $S(p, 2)$   
 は  $C(\frac{p-1}{2}, 2)$  と表すことができるので、このときは正しい。

そこで  $n > 1$  とする。整数  $a (\neq 0)$  と  $x$  を  $an + x = m$   
 ( $n > |x| > 0$ ) となるようにとり、 $\frac{n}{x}$  を

$$\frac{n}{x} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}$$

と連分展開する。そして、 $k$  が偶数のときには

$$f_1 = a + \frac{1}{a_1 +} \dots + \frac{1}{a_k + 2\varepsilon} + \frac{1}{(-a_k)} + \dots + \frac{1}{(-a_1)}$$

$k$  が奇数のときは

$$f_2 = a + \frac{1}{a_1 +} \dots + \frac{1}{a_k + (-2\varepsilon)} + \frac{1}{(-a_k)} + \dots + \frac{1}{(-a_1)}$$

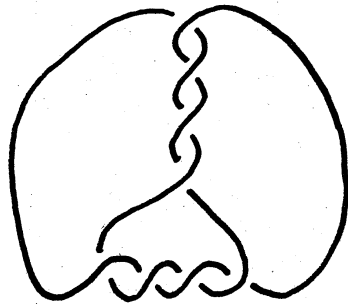
という連分を考える。(ただし、 $2mn = p - \varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) と  
 する) すると、 $f_1 = f_2 = \frac{p}{2n^2}$  となることがわかるので  
 (たとえば、[12], [2] で説明されているように行列  
 を用いる)、 $S(p, 2n^2)$  が  $C(a, a_1, \dots, a_k, \pm 2, -a_k,$   
 $\dots, -a_1)$  と表すことができることが示された。

(証明終り)

注意 Lickorish [7] の方法は,  $K$  の double branched cover  $M(K)$  の,  $H_1(M(K))$  上の linking form を調べたものである。これを two-bridge knot に適用すると,  $u(K) = 1$  となるものは,  $S(p, 2\pi^2)$  の形であることしかわからない。ただし,  $\pi$  と  $p$  は互いに素のつまり定理の (2) に書かれていますねについての条件が与えられていないのである。

例  $u(\delta_3) = 2$  (notation は [1] による)

この knot は  $S(17, 4)$  または  $C(4, 4)$  と表され, 次のようなものである。



上の図から  $u(\delta_3) \leq 2$  はすぐにもわかるから,  $u(\delta_3) = 1$  であると仮定して矛盾を導こう。

$\frac{(17 \pm 1)}{2} = 8 (=2^3)$  or  $9 (=3^2)$  だから, 定理の「(1)  $\Rightarrow$  (2)」より,  $\delta_3$  は,  $S(17, 2)$ ,  $S(17, 2 \cdot 8^2)$  or  $S(17, 2 \cdot 9^2)$  になるはずである, とは3が, Schubert によると [11, 2] 「 $S(p, 2)$  と  $S(p, 2')$  が同じ knot を表す  $\Leftrightarrow \pm 2' 2^{\pm 1} \equiv 1 \pmod{p}$ 」であるから, 矛盾してゐることになる。

$S(17, 4) = S(17, 2 \cdot 6^2)$  であるから, Lickorish  
の方法では判定できないことを注意しておく。

同じ方法で,

$8_4, 8_6, 8_8, 8_{12}, 9_5, 9_8, 9_{15}, 9_{17}, 9_{31}$

の unknotting number はすべて 2 となることがわかる。これは,  
[10] では判定できていなかったものである。このうち,  
 $8_8, 9_{15}, 9_{17}, 9_{31}$  は Lickorish の方法でも判定可能なも  
のである。( [10] で判定できていなかったもののうち,  
 $7_4$  は Lickorish が  $u(7_4) = 2$  であることを [7] で示して  
いる。また, [7] では, Rickard が, unknotting operation  
に  $+$ ,  $-$  をつけて考えて, signature も込めて評価する方法で  
もう一つ判定できる (計 6 つ) と書かれているが, それが上  
記の 9 つの中にはいるかどうかは, 知らない。この方法に  
ついては [3] 参照)

現在のところ, 9-crossing までの knot のうち unknotting  
number のわかっているものは,

$8_{10}, 8_{16}, 9_{25}, 9_{32}, 9_{10}, 9_{13}, 9_{35}, 9_{38}, 9_{49}$

の 9 つで, 前の 4 つは  $u = 1$  或  $2$ , 後の 5 つは  $u = 2$  或  $3$



である。

最近(1985年6月) Cochran-Lickorish [3] により,  
Donaldson の定理を使,  $\tau$ -unknotting number 判定法が考え  
られているが, まだ具体的に unknotting number を決定するに  
は到, ていないようである。

#### References

- [1] J.W. Alexander and G.B. Briggs : On types of knotted curves,  
Ann. of Math. 28(1927), 562-586.
- [2] G. Burde and H. Zieschang : KNOTS , De Gruyter studies in  
mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [3] T.D. Cochran and W.B.R. Lickorish : Unknotting information  
from 4-manifolds, preprint, 1985.
- [4] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of  
their algebraic properties, Computational Problems in Abstract  
Algebra, Pergamon Press, Oxford-New York, 1969, 329-358.
- [5] M. Culler, C.McA. Gordon, J. Luecke, and P.B. Shalen : Dehn  
surgery on knots, preprint, 1985.
- [6] T. Kanenobu and H. Murakami : Two-bridge knots with unknotting  
number one, preprint, 1985.
- [7] W.B.R. Lickorish : The unknotting number of a classical knot,  
Contemporary Mathematics, Proceedings 1981 Amer. Math. Soc.  
Conf., Rochester, N.Y., to appear.
- [8] J.M. Montesinos : Surgery on links and double branched  
coverings of  $S^3$ , Ann. of Math. Studies 84(1975), 227-259.

- [ 9 ] L. Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. of Math. 38(1971), 737-745.
- [10] Y. Nakanishi : A note on unknotting number, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 9(1981), 99-108.
- [11] H. Schubert : Knoten mit zwei Brüken, Math. Z. 65(1965), 133-170.
- [12] L. Siebenmann : Exercices sur les noeuds rationnels, preprint, Orsay, 1975.
- [13] H. Wendt : Die gordische Auflösung von Knoten, Math. Z. 42 (1937), 680-696.